

SILNE DOWODY

Zadanie 1: Udowodnij, że liczba $(100! + 101!!)$ jest podzielna przez 89.

Rozwiązanie

Skorzystamy z rekurencyjnych definicji silni liczby n , opisanej w *Świecie Matematyki* nr 33 oraz rekurencyjnej definicji podwójnej silni liczby n , przedstawionej w 34. numerze *Świata Matematyki*:

$$\begin{aligned}(100! + 101!!) &= 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88! + 101 \cdot 99 \cdot 97 \cdot 95 \cdot 93 \cdot 91 \cdot 89 \cdot 87!! = \\ &= 89 \cdot (100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 88! + 101 \cdot 99 \cdot 97 \cdot 95 \cdot 93 \cdot 91 \cdot 87!!)\end{aligned}$$

Odpowiedź: Liczba $(100! + 101!!)$ jest podzielna przez 89.



Zadanie 2: Udowodnij, że liczba $(100!! + 101!)$ nie jest podzielna przez 89.

Rozwiązanie

1). Liczba $101!$ jest równa iloczynowi **wszystkich** liczb naturalnych większych od 1 i mniejszych od 102, więc liczba $101!$ jest podzielna przez 89.

2). Liczba $100!!$ jest równa iloczynowi wszystkich dodatnich **parzystych** liczb naturalnych mniejszych lub równych 100.

Zatem możemy zapisać:

$$100!! = 100 \cdot 98 \cdot 96 \cdot 94 \cdot 92 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = (2 \cdot 50) \cdot (2 \cdot 49) \cdot (2 \cdot 48) \cdot (2 \cdot 47) \cdot (2 \cdot 46) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1) = 2^{50} \cdot (50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2^{50} \cdot 50!$$

Liczba $2^{50} \cdot 50!$ nie jest podzielna przez 89, ponieważ:

- liczba 89 jest liczbą pierwszą,
- $\text{NWD}(2^{50}, 89) = 1$,
- $\text{NWD}(50!, 89) = 1$,

gdzie: $\text{NWD}(a, b)$ to największy wspólny dzielnik liczb a, b . Temat wspólnego dzielnika poruszaliśmy już w artykule *Zbieranie żółędzi* z 6. numeru *Świata Matematyki*. Z powyższego widzimy, że liczba $100!!$ nie jest podzielna przez 89.

Odpowiedź: Ponieważ liczba $100!!$ nie jest podzielna przez 89, a liczba $101!$ jest podzielna przez 89, to suma $(100!! + 101!)$ nie jest podzielna przez 89.